12 ශ්‍රේණිය - සංයුක්ත ගණිතය I

කාලය - පැය $2\frac{1}{2}$

A කොටසේ ප්‍රශ්න සියල්ලටමත් B කොටසින් ප්‍රශ්න පහකටත් පිළිතුරු සපයන්න.

A කොටස

01. සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $7^{n+1} + 8^{2n-1}$ යන්න 57 න් බෙදෙන බව ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය භාවිතයෙන් සාධනය කරන්න.

පිළිතුර

$f(n) = 7^{n+1} + 8^{2n-1}$

$n=1$ විට $f(1) = 7^2 + 8^1 = 49 + 8 = 57$

$\therefore$ $n=1$ විට $f(n)$, 57 න් බෙදේ. — 05

$n = p$ විට, ප්‍රතිඵලය සත්‍ය යැයි උපකල්පනය කරමු.

$\therefore f(p) = 7^{p+1} + 8^{2p-1} = 57k \quad (k \in \mathbb{Z}) \longleftarrow (1)$ 05

$n = p+1$ විට $f(p+1) = 7^{p+1+1} + 8^{2(p+1)-1} = 7^{p+2} + 8^{2p+1}$ 5

$= 7^{p+2} + 8^{2p-1+2} = 7^{p+2} + 8^2 \cdot 8^{2p-1}$

$= 7^{p+2} + 64\left[57k - 7^{p+1}\right]$

$= 57k \times 64 + 7^{p+1}\left[7 - 64\right]$

$= 57k \times 64 + 7^{p+1}(-57)$

$= 57\left(64k - 7^{p+1}\right)$ 5

$\therefore f(p+1)$, 57 න් බෙදේ.

$n=1$, $p$ හා $p+1$ ට සත්‍ය බැවින් ග.අ.මූ. අනුව සියලු ධන නිඛිල සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. 5

25

(02) $\dfrac{2x^3 - x + 3}{x(x-1)^2}$ භින්න භාග සොයන්න.

පිළිතුර

$$\frac{2x^3 - x + 3}{x(x-1)^2} = A + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2} \quad \text{— } 05$$

$$2x^3 - x + 3 = Ax(x-1)^2 + B(x-1)^2 + Cx(x-1) + Dx$$

$x = 0 \Rightarrow \underline{\underline{3 = B}}$ ; $x^3 \Rightarrow \underline{\underline{2 = A}}$ — නිවැ 04 ම නම් → 10, " 03 → 10

$x = 1 \Rightarrow \underline{\underline{4 = D}}$ — $x^2 \Rightarrow 0 = -2A + B + C$ " 02, 01 } — 05

$$0 = -2(2) + 3 + C$$

$$\underline{\underline{C = 1}}$$

$$\frac{2x^3 - x + 3}{x(x-1)^2} = 2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{4}{(x-1)^2} \quad \text{— } 05$$

$\boxed{25}$

(03) $f(x) = ax^3 + bx^2 - 2x + c$ ලෙස ගනිමු.

(i) $f(x)$ යන්න, $(x^2+x)$ මගින් බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂය $6(x+1)$ ද,

(ii) $(x-1)$ යනු $f(x)$ හි සාධකයක්ද නම් වූවිට,

$a, b$ හා $c$ හි අගයන් සොයන්න.

පිළිතුර

$$f(x) = ax^3 + bx^2 - 2x + c \equiv (x^2+x)\phi(x) + 6(x+1)$$

$$\equiv x(x+1)\phi(x) + 6(x+1) \quad 05$$

$x = 0$ විට; $\underline{\underline{c = 6}}$ (5)

$x = -1 \Rightarrow -a + b + 2 + 6 = 0$

$$b - a = -8 \quad \text{— } (1) \quad (5)$$

$(x-1)$, $f(x)$ හි සාධකයක් $\therefore f(1) = 0$

$$a + b - 2 + c = 0 \Rightarrow a + b = -4 \quad \text{— } (2) \quad (5)$$

$(1) + (2) \Rightarrow 2b = -12 \Rightarrow b = \underline{\underline{-6}}$ එවිට $\underline{\underline{a = 2}}$ — 05

$\boxed{25}$

(04) $\dfrac{x}{2x-1} \le -2$ අසමානතාවය සපුරාලනු ලබන $x$ හි තාත්වික අගයන් කුලකය සොයන්න.

පිළිතුර

$$\frac{x}{2x-1} \le -2$$

$$\frac{x}{2x-1} + 2 \le 0 \quad 5$$

$$\frac{x+4x-2}{2x-1} \le 0$$

$$\frac{5x-2}{2x-1} \le 0 \quad 5$$

$$\frac{5\left(x-\frac{2}{5}\right)}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)} \le 0$$

$(+)$ $\frac{2}{5}$ $(-)$ $\frac{1}{2}$ $(+)$ 10

$\therefore$ විසඳුම $x \in \left[\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right)$

හෝ

$$\frac{2}{5} \le x < \frac{1}{2} \quad 5$$

$\boxed{25}$

(05). $ax^2+bx+c=0$ සමීකරණයේ මූල $\alpha$ හා $\beta$ නම්, $\frac{1}{\alpha}$ හා $\frac{1}{\beta}$ මූල වන වර්ගජ සමීකරණය සොයන්න.

$ax^2+bx+c=0$ හි මූල $\alpha$ හා $\beta$ නිසා,

$$\alpha+\beta = \frac{-b}{a} \quad ; \quad \alpha\beta = \frac{c}{a} \quad — 05$$

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \frac{-b}{a} \times \frac{a}{c} = \frac{-b}{c} \quad 5$$

$$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{a}{c} \quad 5$$

$\therefore$ $\frac{1}{\alpha}$ හා $\frac{1}{\beta}$ මූල වන විට.

$$\left(x-\frac{1}{\alpha}\right)\left(x-\frac{1}{\beta}\right) = 0 \quad 5$$

$$x^2 - \left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)x + \frac{1}{\alpha\beta} = 0$$

$$x^2 - \left(\frac{-b}{c}\right)x + \frac{a}{c} = 0$$

$$cx^2+bx+a = 0 \,//. \quad 5$$

$\boxed{25}$

(06) $2\log_x a + \log_{ax} a + 3\log_{a^2x} a = 0$ සමීකරණය විසඳන්න.

විසඳුම

$$\frac{2}{\log_a x} + \frac{1}{\log_a ax} + \frac{3}{\log_a a^2x} = 0 \quad (05)$$

$$\frac{2}{\log_a x} + \frac{1}{\log_a a + \log_a x} + \frac{3}{\log_a a^2 + \log_a x} = 0 \quad (05)$$

$$\frac{2}{\log_a x} + \frac{1}{1 + \log_a x} + \frac{3}{2 + \log_a x} = 0$$

$\log_a x = y$ ලෙස ගනිමු;

$$\frac{2}{y} + \frac{1}{1+y} + \frac{3}{2+y} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{2(2+y)(1+y) + y(2+y) + 3y(1+y)}{y(1+y)(2+y)} = 0$$

$$2(2+3y+y^2) + 2y + y^2 + 3y + 3y^2 = 0$$

$$6y^2 + 11y + 4 = 0 \quad (5)$$

$$(2y+1)(3y+4) = 0$$

$y = -1/2$ හෝ $y = -4/3$.

$\log_a x = -1/2$ හෝ $\log_a x = -4/3$

$x = a^{-1/2}$ හෝ $x = a^{-4/3}$ (5)

$\boxed{25}$

07. $A \equiv (6,3)$, $B(-3,5)$, $C \equiv (4,-2)$, $D \equiv (x_0, y_0)$

වේ. $\dfrac{DBC\Delta}{ABC\Delta} = \dfrac{|x_0+y_0-2|}{7}$ බව පෙන්වන්න.

පිළිතුර.

$$\frac{\Delta DBC}{\Delta ABC} = \frac{\frac{1}{2}|x_0(5+2)+(-3)(-2-y_0)+4(y_0-5)|}{\frac{1}{2}|6(5+2)+(-3)(-2-3)+4(3-5)|}$$ 10 05

$$= \frac{|7x_0+7y_0-14|}{|42+15-8|} = \frac{7}{49}|x_0+y_0-2|$$ 05

$$= \frac{|x_0+y_0-2|}{7}$$ 05

25

08. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos(\tan x)}{\tan x} = 0$ බව පෙන්වන්න.

පිළිතුර

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(\tan x)}{\tan x} \times \frac{1+\cos(\tan x)}{1+\cos(\tan x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos^2(\tan x)}{\tan x\,[1+\cos(\tan x)]}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2(\tan x)}{\tan x\,[1+\cos(\tan x)]}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin(\tan x)}{\tan x} \times \sin(\tan x) \times \frac{1}{1+\cos(\tan x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin(\tan x)}{\tan x} \cdot \lim_{x \to 0} \sin(\tan x) \times \lim_{x \to 0} \frac{1}{1+\cos(\tan x)}$$

$$= 1 \times 0 \times \frac{1}{1+1}$$

$$= \underline{\underline{0}}$$

(09) . $f(x) = 2x^3+3x^2-12x+5$ ශ්‍රිතයේ හැරුම් ලක්ෂ්‍ය සොයන්න. එනයින් $f(x)$ ශ්‍රිතය වැඩිවන $x$ හි පරාසය නිර්ණය කරන්න.

පිළිතුර

$$f'(x) = 6x^2+6x-12 \quad (05)$$

$$= 6(x^2+x-2)$$

හැරුම් ලක්ෂ්‍ය සඳහා $f'(x)=0$

$$x^2+x-2=0$$

$$(x+2)(x-1)=0 \quad (5) \Rightarrow \underline{x=-2} \text{ හෝ } \underline{x=+1} \quad (5)$$

| | $x<-2$ | $-2<x<+1$ | $+1<x$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | (+) | (−) | (+) |

(5)

$f(x)$ ශ්‍රිතය වැඩිවන $x$ හි අගය පරාසය $\underline{x<-2 \text{ හෝ } x>1}$ (5)

$\boxed{25}$

(10) . $2\cos\theta + 2\cos(\theta+\pi/3) = 3$ හි සාධාරණ විසඳුම් සොයන්න.

පිළිතුර.

$$2\left[\cos\theta + \cos(\theta+\pi/3)\right] = 3$$

$$2\times 2\cos\left(\frac{2\theta+\pi/3}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi/3}{2}\right) = 3 \quad (05)$$

$$4\cos\left(\theta+\pi/6\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 3$$

$$\cos(\theta+\pi/6) = \sqrt{3}/2 \quad (05)$$

මු.වි. $\theta+\pi/6 = \pi/6$ (05)

$\therefore$ සා.වි. $\theta+\pi/6 = 2n\pi \pm \pi/6$

$$\theta = 2n\pi \pm \pi/6 - \pi/6 \quad (05); \quad n\in\mathbb{Z} \quad (5)$$

$\boxed{25}$

## B කොටස

(11) (a) (i) ශේෂ ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න.

(ii). $f(x)$ බහුපදය $(x-a)(x-b)$ වලින් බෙදූ විට ශේෂය $g(x)$ නම් $g(x) = \left\{\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}\right\} x + \left\{\dfrac{b\,f(a)-af(b)}{b-a}\right\}$

බව පෙන්වන්න.

(iii). $f(x) = x^4 + ax^3 + bx + c$ යන්න $(x-1)(x+1)(x-2)$ මගින් හරියටම බෙදේ නම්, $a, b, c$ නියත සොයා ඉතිරි සාධකය ද සොයන්න.

$2f(x+1) = x^2 + x - 2$ සමීකරණය ද විසඳන්න.

(b). $\dfrac{3x-1}{3(x-1)} < \dfrac{3(x-3)}{3x-7}$ අසමානතාව විසඳන්න.

පිළිතුර

(a) (i) $f(x)$ නම් $x$ හි බහුපද ශ්‍රිතය $(x-k)$ වලින් බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂය $f(k)$ වේ. (05)

<u>සාධනය</u>

$f(x)$, $(x-k)$ න් බෙදූ විට ලැබෙන ලබ්ධිය $g(x)$ ද ශේෂය $R$ ද යැයි ගනිමු.

$f(x) \equiv (x-k)\,g(x) + R$ (5)

$x=k \Rightarrow f(k) = (k-k)\,g(k) + R$ (5)

$\therefore R = f(k)$. (5) $\boxed{20}$

(ii) $f(x)$ බහුපදය $(x-a)(x-b)$ ගෙන් බෙදූ විට, ශේෂය $g(x)$ නම්;

$g(x) = Ax + B$ ලෙස වේ.

$\therefore f(x) \equiv (x-a)(x-b)\,\phi(x) + Ax + B$. (05)

$x = a \Rightarrow f(a) = Aa + B$. —① (5)

$x = b \Rightarrow f(b) = Ab + B$ —②. (5)

① − ② $\Rightarrow f(a) - f(b) = A(a-b) \Rightarrow A = \dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$ (5)

① × b − ② × a $\Rightarrow bf(a) - af(b) = B(b-a)$

$\Rightarrow B = \dfrac{bf(a) - af(b)}{b-a}$. (5)

$$\therefore g(x) = \frac{f(a)-f(b)}{a-b}\,x + \frac{bf(a)-af(b)}{b-a} \quad //.$$

$\boxed{25}$

(iii) $f(x) = x^4 + ax^3 + bx + c \equiv (x-1)(x+1)(x-2)\,\phi(x)$ (5)

$x = 1 \Rightarrow 1 + a + b + c = 0 \Rightarrow a + b + c = -1$ —① (5)

$x = -1 \Rightarrow 1 - a - b + c = 0 \Rightarrow a + b - c = 1$ —② (5)

$x = 2 \Rightarrow 16 + 8a + 2b + c = 0 \Rightarrow 8a + 2b + c = -16$ —③ (5)

$a = -5/2$ (5), $b = 5/2$ (5), $c = -1$ (5)

(5)

$$f(x) = x^4 - \frac{5}{2}x^3 + \frac{5}{2}x - 1 \equiv (x-1)(x+1)(x-2)(Ax+B)$$ (5)

$x^4 \Rightarrow A = 1$   නියත $\Rightarrow -1 = 2B \Rightarrow B = -1/2$.

$\therefore$ ඉතිරි සාධකය $= \underline{\underline{(x - 1/2)}}$ (5)

$$2f(x+1) = x^2 + x - 2.$$

$$2\left[(x+1)-1\right]\left[(x+1)+1\right]\left[(x+1)-2\right]\left[(x+1)-1/2\right] = x^2+x-2$$ (5)

$$2x(x+2)(x-1)(x+1/2) = x^2+x-2$$

$$x(x+2)(x-1)(2x+1) = x^2+x-2$$

$$= (x+2)(x-1)$$ (5)

$$(x+2)(x-1)\left[x(2x+1) - 1\right] = 0$$

$$(x+2)(x-1)\left[2x^2+x-1\right] = 0$$

$$(x+2)(x-1)(2x-1)(x+1) = 0$$ (5)

$x+2=0$ or $x-1=0$ or $2x-1=0$ or $x+1=0$

$\underline{\underline{x=-2,\ x=1,\ x=1/2,\ x=-1}}$ (10)

$\boxed{70}$

(b). $$\frac{3x-1}{3(x-1)} < \frac{3(x-3)}{3x-7}$$

$$\frac{3x-1}{3(x-1)} - \frac{3(x-3)}{3x-7} < 0$$ (5)

$$\frac{(3x-1)(3x-7) - 3(x-3)3(x-1)}{3(x-1)(3x-7)} < 0$$ (5)

$$\frac{(3x-1)(3x-7) - 9(x-3)(x-1)}{3(x-1)(3x-7)} < 0$$

$$\frac{\cancel{9x^2} - 24x + 7 - \cancel{9x^2} + 36x - 27}{3(x-1)(3x-7)} < 0$$

$$\frac{12x - 20}{3(x-1)(3x-7)} < 0$$

$$\frac{\left(x - \frac{5}{3}\right)}{(x-1)\left(x - \frac{7}{3}\right)} < 0 \quad 5$$

$\ominus$   $\oplus$   $\ominus$   $\oplus$   10

$1 \qquad \frac{5}{3} \qquad \frac{7}{3}$

$$x \in (-\infty, 1) \cup \left(\tfrac{5}{3}, \tfrac{7}{3}\right) \quad 10$$

හෝ $\quad \underline{\underline{x < 1}}$ හෝ $\underline{\underline{\frac{5}{3} < x < \frac{7}{3}}}$ $\quad \boxed{35}$

(12) (a) (i) $x^2 + 2(b + c - a)x + 2bc = a^2$ නම් $a, b, c$ තාත්වික වේ. මූල සැමවිටම තාත්වික බව පෙන්වන්න. මූල සමාන වීමට අවශ්‍යතාව ලියන්න.

(ii) $(a-b)x^2 - 2(a^2+b^2)x + a^3 - b^3 = 0$ සමීකරණයේ $a$ හා $b$ හි ලකුණු සමාන හෝ ප්‍රතිවිරුද්ධ වීම අනුව තාත්වික හෝ අතාත්වික මූල ඇති බව පෙන්වන්න. තවද මූල අතර වෙනස $\frac{2(a+b)\sqrt{ab}}{a-b}$ බව පෙන්වන්න.

(b) $64^{\frac{1}{x}} - 2^{(3x+3)/x} + 12 = 0$ සමීකරණය විසඳන්න.

පිටුව 6

12 (a) (i) $x^2 + 2(b+c-a)x + 2bc = a^2$

$x^2 + 2(b+c-a)x + 2bc - a^2 = 0$ (5)

$\therefore$ සමීකරණයේ විවේචකය $\Delta = [2(b+c-a)]^2 - 4(2bc - a^2)$ (5)

$\therefore \Delta = 4(b^2 + c^2 + a^2 + \cancel{2bc} - 2ca - 2ba - \cancel{2bc} + a^2)$

$= 4(a^2 - 2ab + b^2 + a^2 - 2ac + c^2)$

$= 4[(a-b)^2 + (a-c)^2] \geq 0$ (5) (5)

$\therefore$ මූල තාත්වික වේ (5)

$a = b = c$ විට $\Delta = 0$ (5) $\therefore$ මූල සමාන වේ. $\boxed{30}$

(ii) $(a-b)x^2 - 2(a^2+b^2)x + a^3 - b^3 = 0$ සමී. යේ විවේචකය

$\Delta = [-2(a^2+b^2)]^2 - 4(a-b)(a^3-b^3)$ (5)

$= 4[a^4 + b^4 + 2a^2b^2] - 4[a^4 - ab^3 - a^3b + b^4]$

$= 4[2a^2b^2 + ab^3 + a^3b]$ (5)

$= 4ab[2ab + b^2 + a^2]$

$= 4ab(a+b)^2$ (5)

$a > 0, b > 0$ විට $\Delta > 0$ (5)

$a < 0, b < 0$ විට $\Delta > 0$ (5)

$\therefore a$ හා $b$ හි ලකුණ සමාන විට, මූල තාත්වික වේ (5)

$a > 0, b < 0$ විට $\Delta < 0$ (5)

$a < 0, b > 0$ විට $\Delta < 0$ (5)

$a$ හා $b$ හි ලකුණ ප්‍රතිවිරුද්ධ විට මූල අතාත්වික වේ. (5)

මූල $\alpha$ හා $\beta$ නම්, $\alpha+\beta = -\frac{2(a^2+b^2)}{a-b}$ 5 , $\alpha\beta = \frac{a^3-b^3}{a-b}$ 5

මූල වෙනස $= \alpha-\beta$.

$$= \sqrt{(\alpha-\beta)^2} \quad 5 \quad = \sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta} \quad 5$$

$$= \sqrt{\frac{4(a^2+b^2)^2}{(a-b)^2} - 4\left(\frac{a^3-b^3}{a-b}\right)} \quad 5$$

$$= \frac{2}{a-b}\sqrt{(a^2+b^2)^2-(a^3-b^3)(a-b)} \quad 5$$

$$= \frac{2}{a-b}\sqrt{a^4+b^4+2a^2b^2-a^4+a^3b+b^3a-b^4}$$

$$= \frac{2}{a-b}\sqrt{ab(a^2+2ab+b^2)} \quad 5$$

$$= \frac{2(a+b)}{(a-b)}\sqrt{ab}$$

$\boxed{80}$

(b). $64^{\frac{1}{x}} - 2^{(3x+3)/x} + 12 = 0$

$8^{2/x} - 2^{3(1+\frac{1}{x})} + 12 = 0$ 5

$(8^{1/x})^2 - 8^{1/x} \times 8 + 12 = 0$ 5

$8^{1/x} = y$ නම්, $y^2 - 8y + 12 = 0$ 5

$(y-2)(y-6) = 0$ 5

$y = 2$ හෝ $y = 6$ 5

$8^{1/x} = 2$ හෝ $8^{1/x} = 6$ 5

$2^{3/x} = 2$ හෝ $\log_8 6 = \frac{1}{x}$.

$\frac{3}{x} = 1$ $\quad$ $x = \log_6 8$ 5

$x = 3$ 5

$\boxed{40}$

13 (a) $\lim_{x \to 1} \left\{ \frac{(x-1)}{\sqrt{1+x} - \sqrt{2}} \right\}$ සොයන්න.

(b) (i) $y = \sqrt{x}$ ප්‍රථම මූලධර්ම මගින් අවකලනය කරන්න.

(ii) $y = \tan^{-1}x$ හි අවකලනයේ සංගුණකය ලබා ගන්න.

(iii) $y = x\tan^{-1}x$ නම්,

$x(1+x^2)\frac{dy}{dx} = x^2 + (1+x^2)y$ බව පෙන්වන්න.

තවද $(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} - 2y = 2$ බව පෙන්වන්න.

(c). $x = 2t^2+1$ සහ $y = 4t^4 - 1$ නම්,

$\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) + 2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 0$ බව පෙන්වන්න.

විසඳුම.

(a) $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{1+x} - \sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{2}}{\sqrt{1+x} + 2}$ 5

$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(\sqrt{1+x} + \sqrt{2})}{1+x-2} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(\sqrt{1+x} + \sqrt{2})}{(x-1)}$ 5

$= \lim_{x \to 1} (\sqrt{1+x} + \sqrt{2})$ 5

$= \sqrt{2} + \sqrt{2}$

$= 2\sqrt{2}$ 5 — $\boxed{20}$

(b) (i) $y = \sqrt{x}$ — ①

$x$ හි වැඩිවීම $\Delta x$ විට $y$ හි වැඩිවීම $\Delta y$ නම්;

$y + \Delta y = \sqrt{x + \Delta x}$ — ② 5

② − ① ⇒ $\Delta y = \sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(\frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}\right)$ 5

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}\right) \quad 5$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \times \frac{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} \quad 5$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left\{\frac{x+\Delta x - x}{\Delta x\left[\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right]}\right\}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} \quad 5$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad 5$$

$\boxed{30}$

(ii) $y = \tan^{-1}x \Rightarrow x = \tan y$.

$$\frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}\tan y.$$

$$1 = \frac{d}{dy}(\tan y)\cdot\frac{dy}{dx}.$$

$$1 = \sec^2 y \cdot \frac{dy}{dx} \quad 5 \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2} \quad 5$$

$\boxed{10}$

(iii) $y = x\tan^{-1}x$

$$\frac{dy}{dx} = x\left(\frac{1}{1+x^2}\right) + \tan^{-1}x \quad 5 \quad 5$$

$$\frac{dy}{dx}(1+x^2) = x + (1+x^2)\tan^{-1}x.$$

$$x(1+x^2)\frac{dy}{dx} = x^2 + (1+x^2)x\tan^{-1}x \quad 5$$

$$x(1+x^2)\frac{dy}{dx} = x^2 + (1+x^2)y$$

$\boxed{15}$

8

$$x(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\left[1+3x^2\right] = 2x + y(2x) + (1+x^2)\frac{dy}{dx} \quad 10$$

$$x(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\left[1+3x^2-1-x^2\right] - 2x(1+y) = 0 \quad 5$$

$$x(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + 2x^2\frac{dy}{dx} - 2x(1+y) = 0 \quad 5$$

$$(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} - 2y = 2 \quad 5 \quad \boxed{25}$$

(C). $x = 2t^3+1 \qquad y = 4t^4-1$

$$\frac{dx}{dt} = 6t^2 \quad 5 \qquad \frac{dy}{dt} = 16t^3 \quad 5$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} \; 5 = 16t^3 \times \frac{1}{6t^2} = \frac{8t}{3} \; 5 \quad -(1)$$

$$\frac{d}{dx} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{8}{3}\frac{dt}{dx} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{8}{3} \times \frac{1}{6t^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4}{9t^2} \quad -(2) \quad 10$$

$$\frac{d}{dx} \Rightarrow \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{4}{9}\frac{d}{dx}(t^{-2}) = \frac{4}{9}(-2)t^{-3}\cdot\frac{dt}{dx} \quad 5$$

$$= \frac{-8}{9t^3} \times \frac{1}{6t^2} = \frac{-4}{27t^5} \quad -(3) \quad 10$$

(1), (2) ∾ (3) ⇒

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) + 2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = \frac{8t}{3} \times \left(\frac{-4}{27t^5}\right) + 2\left(\frac{4}{9t^2}\right)^2 \quad 10$$

$$= \frac{-32}{81t^4} + \frac{32}{81t^4} = \underline{\underline{0}}$$

$\boxed{50}$

14 (a)
f(x) ශ්‍රිතය $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-1)(x-5)}$ මගින් දී ඇත.

(i) ශ්‍රිත වක්‍රයේ ස්ථාවර ලක්ෂ්‍ය සොයා ඒවායේ ස්වභාවය සාකච්ඡා කරන්න.

(ii). $f(x)$ ශ්‍රිතයේ ස්ථානීය උපරිම හා ස්ථානීය අවම අගයන් සොයන්න.

(iii) $y = f(x)$ ශ්‍රිතයේ සිරස් හා තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ සොයා වක්‍රයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

එනයින් $\dfrac{x^2}{(x-1)(x-5)} - e^{-x} = 0$ සමීකරණයේ මූල සංඛ්‍යාව සොයන්න.

(b) අරය r වන වෘත්තයක් තුළ අන්තර්ගත කළ හැකි විශාලම වර්ගඵලයක් සහිත ඍජුකෝණාස්‍රයේ මාන සොයන්න.

14) කොටස 6

(a) $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-1)(x-5)}$

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x-5)\,2x - x^2\left[(x-1) + x-5\right]}{(x-1)^2(x-5)^2} \quad 10$$

$$= \frac{(x-1)(x-5)(2x) - x^2(2x-6)}{(x-1)^2(x-5)^2}$$

$$= \frac{2x(x^2-6x+5) - 2x^3 + 6x^2}{(x-1)^2(x-5)^2}$$

$$= \frac{-6x^2+10x}{(x-1)^2(x-5)^2} = \frac{2x(5-3x)}{(x-1)^2(x-5)^2} \quad 10$$

ස්ථාවර ලක්ෂ්‍ය සඳහා $f'(x) = 0$ 5

$2x(5-3x) = 0 \Rightarrow x = 0$ හෝ $x = 5/3$ 5

| $x<0$ | $0<x<1$ | $1<x<5/3$ | $\frac{5}{3}<x<5$ | $x>5$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)<0$ | $f'(x)>0$ | $f'(x)>0$ | $f'(x)<0$ | $f'(x)<0$ |

15

$x = 0$ හිදී ස්ථානීය අවමයක් 5

$x = 5/3$ හිදී ,, උපරිමයක් 5

$f(0) = 0 \Rightarrow$ ස්. අ. $\equiv (0,0)$ 5

$$f(5/3) = \frac{(5/3)^2}{(5/3-1)(5/3-5)} = \frac{25}{9} \times \frac{9}{2 \times (-10)} = \frac{-25}{20} = \frac{-5}{4}$$

5

ස්. උ. $\equiv (5/3, -5/4)$.

$x \to 1^-$ විට $f(x) \to +\infty$

$x \to 1^+$ " $f(x) \to -\infty$

$x = 1$ විට සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛයක්. (5)

$x \to 5^-$ විට, $f(x) \to -\infty$

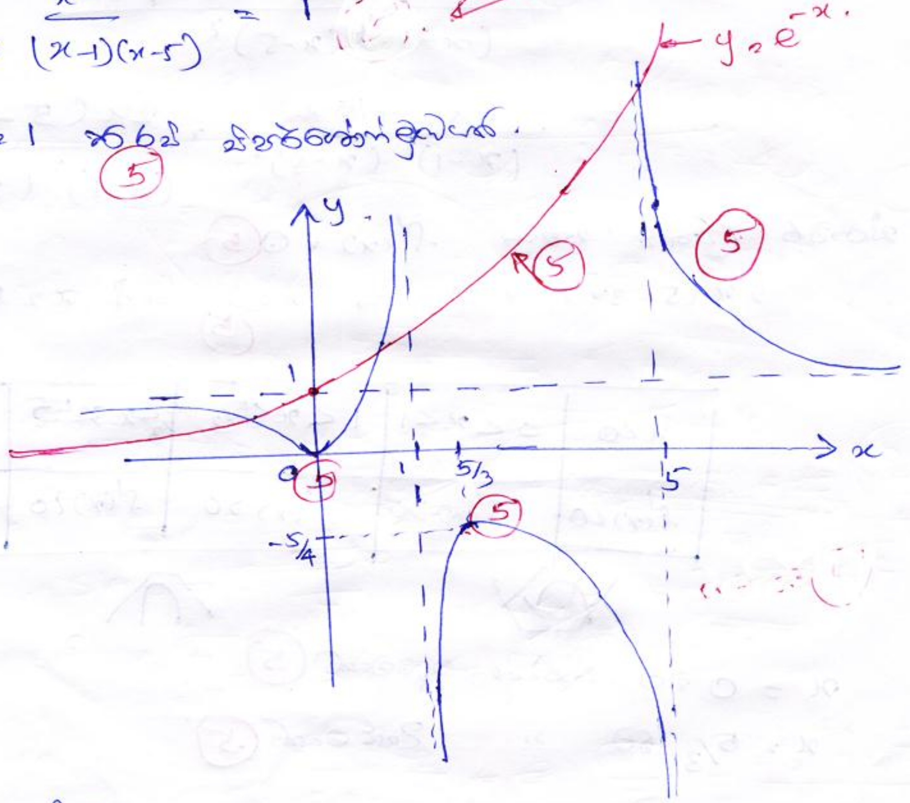
$x \to 5^+$ $f(x) \to +\infty$

$x = 5$ විට සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛයක් (5)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{(x-1)(x-5)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{(1-1/x)(1-5/x)} \Rightarrow 1 \quad (5)$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{(x-1)(x-5)} = 1$$

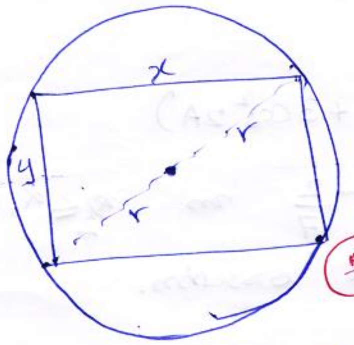
$y = 1$ තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛයක්. (5)




$\therefore y = \dfrac{x^2}{(x-1)(x-5)}$ හා $y = e^{-x}$ වක්‍ර හමුවන 3කදී ඡේදනය වේ. $\therefore \dfrac{x^2}{(x-1)(x-5)} - e^{-x} = 0$ ට මූල 3ක්. (5)

$\boxed{110}$

(14) (b). (10)




$$x^2+y^2=(2r)^2$$

$$y^2 = 4r^2-x^2 \quad (5)$$

(5)

වර්ගඵලය $A = xy$.

$$= x\sqrt{4r^2-x^2} \quad (5)$$

$$\frac{dA}{dx} = x\,\frac{1}{2}\left(4r^2-x^2\right)^{-1/2}(-2x) + \sqrt{4r^2-x^2} \quad (5)$$

$$= \frac{-x^2}{\sqrt{4r^2-x^2}} + \sqrt{4r^2-x^2}$$

$$\frac{dA}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{-x^2+4r^2-x^2}{\sqrt{4r^2-x^2}} = 0 \quad (5)$$

$$-2x^2+4r^2=0$$

$$x^2 = 2r^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}\,r.$$

$x>0 \Rightarrow \underline{x=\sqrt{2}\,r}$ (5)

$0<x<\sqrt{2}\,r$ විට $\frac{dA}{dx}>0$

$\sqrt{2}\,r<x<2r$ විට $\frac{dA}{dx}<0$

$\therefore x=\sqrt{2}\,r$ විට $A$ උපරිම වේ. (5)

එවිට $\underline{y=\sqrt{2}\,r}$. (5)

$\boxed{40}$

15 (a).

I. $\cos^6 A + \sin^6 A = \frac{1}{4}(1+3\cos^2 2A)$

II $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ , $\cos\beta = -\frac{2}{7}$ හා $\frac{\pi}{2} \le \alpha, \beta \le \pi$ වේ නම් $\cos(\alpha-\beta)$ හි අගය සොයන්න.

(b). $f(x) = \sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x - \cos^2 x$ වේ.

$f(x) = R\cos(2x-\alpha)$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කරන්න.

මෙහි R, $\alpha$ නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ.

එනයින් $y = f(x)$ ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් $0 \le x \le \pi$ තුළ ඇඳ ඒ මගින් $f(x) = k$ සමීකරණයට

(i) විසඳුම් 3ක් පැවතීමට

(ii) විසඳුම් 2ක් පැවතීමට

(iii) විසඳුම් 1ක් පැවතීමට

(iv) විසඳුම් නොපවතීමට

k හි අගය හෝ අගය පරාසය සොයන්න.

15 (a)

I $\cos^6 A + \sin^6 A = (\cos^2 A)^3 + (\sin^2 A)^3$

$= (\cos^2 A + \sin^2 A)(\cos^4 A - \cos^2 A \sin^2 A + \cos^4 A)$

$= 1\,(\cos^4 A + \sin^4 A - \cos^2 A \sin^2 A)$

$= (\cos^2 A + \sin^2 A)^2 - 3\cos^2 A \sin^2 A$

$= 1 - \frac{3}{\cancel{4}}(2\sin A \cos A)^2$

$= 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2A.$ //

II $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$ — ①

$\sin\alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$

$\cos\alpha = \frac{\pm\sqrt{5}}{3}$

$\cos\alpha = -\sqrt{5}/3 \quad (\pi/2 < \alpha < \pi).$

$\cos\beta = -\frac{2}{7} \Rightarrow \sin^2\beta = 1 - \cos^2\beta = 1 - \frac{4}{49} = \frac{45}{49}$

$\sin\beta = \pm\frac{\sqrt{45}}{7}$

$\sin\beta = \frac{\sqrt{45}}{7} \quad (\pi/2 < \beta < \pi).$

① $\Rightarrow \cos(\alpha - \beta) = \frac{-\sqrt{5}}{3} \times \frac{-2}{7} + \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{45}}{7} = \frac{2\sqrt{5} + 6\sqrt{5}}{21}$

$= \underline{\underline{\frac{8\sqrt{5}}{21}}}$

(b) . $f(x) = \sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x \cos x - \cos^2 x.$

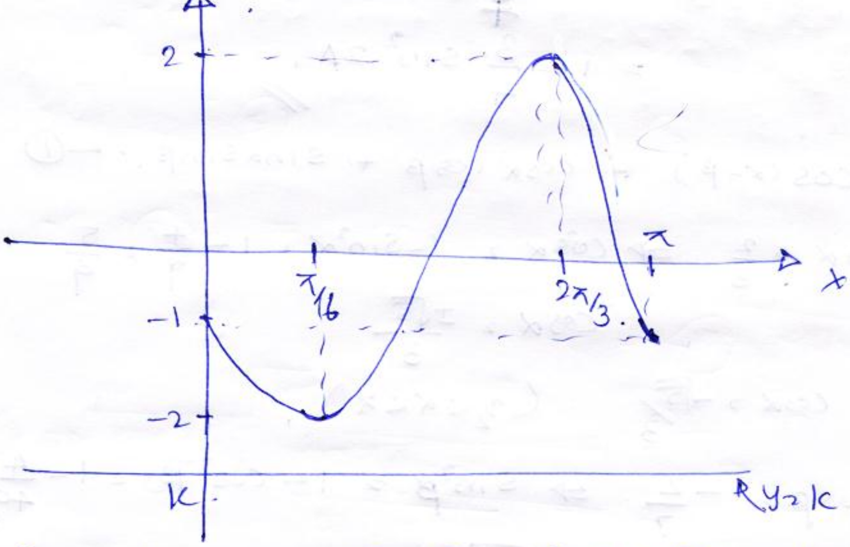
$$= -(\cos 2x) - \sqrt{3}\sin 2x.$$

$$= 2\left[-\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right]$$

$$= -2\left[\cos \pi/3 \cos 2x + \sin \pi/3 \sin 2x\right]$$

$$= -2\cos(2x - \pi/3)$$

එවිට $R = -2$ , $\alpha = \pi/3$ .




(i) $f(x) = k$ සඳහා විසඳුම් 3ක් තිබීමට. $k = -1$ .

(ii) විසඳුම් 2ක් තිබීමට. $-2 < k < -1$ හෝ $-1 < k < 2$

(iii). විසඳුම් 1ක් තිබීමට $k = 2$ හෝ $k = -2$.

(iv). විසඳුම් නොතිබීමට $k < -2$ හෝ $k > 2$ විය යුතුය

16 (a) I $\tan^{-1}\frac{3}{4} + \tan^{-1}\frac{3}{5} - \tan^{-1}\frac{8}{19} = \pi/4$ බව පෙන්වන්න.

II $\sin^{-1}x + \sin^{-1}(1-x) = \cos^{-1}x$ විසඳන්න.

(b) sin සූත්‍රය ද සූත්‍රය අර සාධනය කරන්න.

$$(a+b)\sin\frac{C}{2} = c\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$(a-b)\cos\frac{C}{2} = c\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$$ බව සාධනය කරන්න.

එනයින්

(i) $c^2 = a^2+b^2-2bc\cos C$

(ii) $$\frac{a^2-b^2}{c^2} = \frac{\sin(A-B)}{\sin C}$$ බව පෙන්වන්න.

පිළිතුරු.

(16) I $\tan^{-1} 3/4 = \alpha$ , $\tan^{-1} 3/5 = \beta$ , $\tan^{-1} 8/19 = \gamma$.

එවිට $\tan\alpha = 3/4$ $(0 < \alpha < \pi/4)$ (5) , $\tan\beta = 3/5$ $(0 < \beta < \pi/4)$ (5) $\tan\gamma = 8/19$ $(0 < \gamma < \pi/4)$ (5)

$\therefore \alpha + \beta - \gamma = \pi/4$ බව $\Rightarrow \alpha + \beta = \pi/4 + \gamma$.

දෙපසම tan අගය ගැනීමෙන්

$\tan(\alpha+\beta) = \tan(\pi/4 + \gamma)$ වේ.

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} \ (5) = \frac{3/4 + 3/5}{1 - \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{5}} = \frac{27}{20} \times \frac{20}{11}$$

$$= \frac{27}{11} \ — (1) \ (5) \quad \left(0 < \alpha+\beta < \pi/2\right)$$

$$\tan(\pi/4 + \gamma) = \frac{\tan\pi/4 + \tan\gamma}{1 - \tan\pi/4 \tan\gamma} \ (5) = \frac{1 + 8/19}{1 - 8/19} = \frac{27}{19} \times \frac{19}{11}$$

$$= \frac{27}{11} \ — (2) \ (5) \quad \left(0 < \pi/4 + \gamma < \pi/2\right).$$

$\therefore (1) = (2) \Rightarrow \tan(\alpha+\beta) = \tan(\pi/4 + \gamma)$.

$\therefore \alpha + \beta = \pi/4 + \gamma \Rightarrow \alpha + \beta - \gamma = \pi/4$

$\tan^{-1} 3/4 + \tan^{-1} 3/5 - \tan^{-1} 8/19 = \pi/4$ (5) $\boxed{40}$

II $\sin^{-1}x + \sin^{-1}(1-x) = \cos^{-1}x$.

$\alpha = \sin^{-1}x \Rightarrow \sin\alpha = x$ , $\cos\alpha = \sqrt{1-x^2}$ (5) $\left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$

$\beta = \sin^{-1}(1-x) \Rightarrow \sin\beta = 1-x$ $\cos\beta = \sqrt{1-(1-x)^2}$ (5) $\left(-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$

$\gamma = \cos^{-1}x \Rightarrow \cos\gamma = x$ ; $\sin\gamma = \sqrt{1-x^2}$ (5) $(0 < \gamma < \pi)$

$\therefore \alpha + \beta = \gamma$.

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\gamma$

13

$\therefore \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \cos\gamma$. 5

$\sqrt{1-x^2}\sqrt{2x-x^2} - x(1-x) = x$ 5

$\sqrt{(1-x^2)(2x-x^2)} = x + x(1-x)$

$(1-x^2)(2x-x^2) = [x(1+1-x)]^2$

$= x^2(2-x)^2$

$2x - x^2 - 2x^3 + x^4 = x^2(4-4x+x^2)$

$\cancel{x^4} - 2x^3 - x^2 + 2x - 4x^2 + 4x^3 - \cancel{x^4} = 0$

$2x^3 - 5x^2 + 2x = 0$

$x(2x^2 - 5x + 2) = 0$ 05

$x = 0$ or $(2x-1)(x-2) = 0$

$x = 0$ or $x = 1/2$ $x = 2$ 5 $(x \neq 2)$

$\therefore \underline{\underline{x = 0}}$ හෝ $\underline{\underline{x = 1/2}}$ 5

$\boxed{40}$

(b). සයින් ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කිරීමට - 5

$\Delta$ xn නීතිය සාධනයට - 15 $\boxed{20}$

$(a+b)\sin\frac{C}{2} = c\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$

$\frac{a+b}{c} = \frac{k\sin A + k\sin B}{k\sin C}$ 5 $= \frac{2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}$ 5

$= \frac{\cancel{2}\sin\left(\frac{\pi-C}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\cancel{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}} = \frac{\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\sin\frac{C}{2}}$ 5

$\therefore \underline{\underline{(a+b)\sin\frac{C}{2} = c\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}}$ — (1)

$\boxed{15}$

$$\frac{a-b}{c} = \frac{k\sin A - k\sin B}{k\sin C}$$

$$= \frac{\sin A - \sin B}{\sin C} = \frac{2\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)}{2\sin C/2\,\cos C/2} \quad 5$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi-C}{2}\right)}{\sin C/2\,\cos C/2} \quad 5$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\cos C/2} \quad 5 \qquad \boxed{15}$$

$$\therefore (a-b)\cos C/2 = c\sin\left(\frac{A-B}{2}\right) \quad -(2)$$

(i). $(1)^2 + (2)^2 \Rightarrow$

$$(a+b)^2\sin^2 C/2 + (a-b)^2\cos^2 C/2 = c^2\left[\cos^2\left(\frac{A-B}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{A-B}{2}\right)\right] \quad 5$$

$$(a^2+b^2+2ab)\sin^2 C/2 + (a^2+b^2-2ab)\cos^2 C/2 = c^2$$

$$(a^2+b^2)(\sin^2 C/2 + \cos^2 C/2) - 2ab(\cos^2 C/2 - \sin^2 C/2) = c^2 \quad 5$$

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos C = c^2 \qquad \boxed{10}$$

(ii). $(1) \Rightarrow \dfrac{a+b}{c} = \dfrac{\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\sin C/2} \quad -(3)$

$(2) \Rightarrow \dfrac{a-b}{c} = \dfrac{\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\cos C/2} \quad -(4) \quad 5$

$(3)\times(4) \Rightarrow \dfrac{(a+b)(a-b)}{c^2} = \dfrac{\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\sin C/2\,\cos C/2} \quad 5 \qquad \boxed{10}$

$$\frac{a^2-b^2}{c^2} = \frac{2\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)}{2\sin C/2\,\cos C/2} = \frac{\sin(A-B)}{\sin C}$$